Colle du 9 janvier: Intégration

13.1 Première série

Exercice 1: Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-b^2t^{-2}}dt$.

Exercice 2: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I. On suppose que (f_n) converge simplement vers f. Montrer que $\int_I |f_n - f| \to 0 \Leftrightarrow \int_I |f_n| \to \int |f|$. On pourra étudier d'abord le cas des fonctions à valeurs positives.

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante, continue par morceaux et $a > 0$. On suppose que $t \mapsto t^a f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour $x > 0$ on a: $\int_x^{+\infty} f(t)dt \leq \left(\frac{a}{(1+a)x}\right)^a \int_0^{+\infty} f(t)t^a dt$.

Exercice 4: On dit qu'un rectangle est semi-entier si l'un au moins de ses côtés a pour longueur un nombre entier. Montrer que tout rectangle pouvant être pavé avec des rectangles semi-entiers est semi-entier.

13.2 Deuxième série

Exercice 1: Étudier la convergence puis calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

Exercice 2: On considère $n+1$ points dans $\mathbb{R}^n$. Ce sont les sommets d'un polyèdre P. Calculer le volume de P en fonction des coordonnées des $n+1$ points.

Exercice 3: *(Théorème de d'Alembert)*
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction 2π-périodique ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}dt$ est un entier. En déduire une preuve du théorème de d'Alembert.

Exercice 4: *(Théorème de Weierstrass)*
1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ de classe C^1 en tant que fonction complexe. Soit $z_0 \in U$ et notons $d = d(z_0, U^c)$. En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\lambda(z_0+re^{iu}-z))-f(z)}{z_0+re^{iu}-z}e^{iu}du$, montrer que f est développable en série entière sur $B(z_0, d)$.
2. En déduire que l'image d'une série entière de rayon infini non constante est dense dans $\mathbb{C}$.

13.3 Troisième série

Exercice 1: Calculer les limites de $\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}dt$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}dt$ quand $n \to +\infty$, puis en déduire la formule de Stirling.

Exercice 2: *(Théorème de Cayley-Hamilton)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En étudiant l'intégrale $I_k(r) = \int_0^{2\pi}(re^{it})^k(re^{it}I_n - A)^{-1}dt$, montrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 3: Calculer $f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 4: On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, d'origine O. On se donne n points $Q_1, ..., Q_n$. Montrer qu'il existe un point P sur le cercle de centre O et de rayon 1 tel que $\prod_i PQ_i \geq 1$. Peut-on préciser le résultat lorsque $Q_1, ..., Q_n$ sont dans le disque de centre O et de rayon 1?